Calcul matriciel - Opérations de base

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. **Addition**

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. **Multiplication par un scalaire**

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. **Matrice nulle**

$$O_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

4. **Matrice identité** $(m = n)$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n.$$

Calcul matriciel

L'ensemble des matrices $M_{m\times n}$ satisfait les propriétés EV1-EV8

EV 1 - $A+B=B+A$

EV 2 - $(A+B)+C=A+(B+C)$

EV 3 - $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

EV 4 - $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

EV 5 - $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu B$

EV 6 - $1\cdot A=A\cdot 1=A$

EV 7 - $0_{m\times n}+A=A$

EV 8 - $A+(-A)=0_{m\times n}$

Produit matriciel

Soient $A \in M_{m \times n}$ et $B \in M_{n \times p}$, c'est à dire

$$\text{nombre de colonnes de A} \; = \; \text{nombre de lignes de B}.$$

Alors le **produit matriciel** $AB \in M_{m \times p}$ est défini par

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}, \quad \forall \; 1 \leqslant i \leqslant m, \; 1 \leqslant j \leqslant p.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

La **puissance matricielle** de $A \in M_n$ est définie par

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{k \text{ fois}}, \quad \forall k \in N^*.$$

Produit matriciel

Propriétés

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $(A+B)C = AC + BC$
3. $AI_n = I_m A = A$
4. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
5. Si $AB = BA$, alors $(AB)^k = A^k B^k$.

Remarques

1. Le produit matriciel n'est **pas commutatif** : en général $AB \neq BA$
2. En général nous ne pouvons **pas diviser** par une matrice :

$$AB = AC \;\not\Rightarrow\; B = C.$$

Matrices inversibles

L'inverse

Soit $A \in M_n$. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice $A^{-1} \in M_n$ (appelée **inverse de** A) telle que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

.

Formule pour $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\neq 0}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles - Cas général

On veut construire A^{-1} avec des opérations élémentaires, afin de transformer A en I_n :

$$\underbrace{E_k \dots E_1}_{=A^{-1}} \cdot A = I_n,$$

où $E_1, \dots, E_k$ sont des **matrices élémentaires** qui agissent sur **les lignes** de A.

Théorème

Si $A \in M_n$ est inversible, alors toute suite d'opérations élémentaires qui transforme A en I_n transforme aussi I_n en A^{-1}.

On peut alors appliquer la méthode de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée

$$(A|I_n) \to (I_n|A^{-1}).$$